ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
03-06-2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 133 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α.** Σελίδα 51 σχολικού βιβλίου.

β. Σελίδα 185 σχολικού βιβλίου.

Α3. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η $f\circ g$ ορίζεται με πεδίο ορισμού

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in[2,+\infty)\mid \sqrt{x-2}+1>1\right\}$$
$$=\left\{x\in[2,+\infty)\mid \sqrt{x-2}>0\right\}=\left\{x\in[2,+\infty)\mid x>2\right\}$$
$$=(2,+\infty)$$

Και τύπο

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln(g(x)-1)=2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right)$$
$$=2\ln\left(\sqrt{x-2}\right)=\ln\left(\sqrt{x-2}\right)^2$$
$$=\ln(x-2)$$

Β2. Είναι $h(x)=\ln(x-2),\ x>2$, οπότε

$$h'(x)=\frac{1}{x-2}>0,\ x>2$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Για $x\in(2,+\infty)$ και $y\in h((2,+\infty))$ έχουμε:

$$h(x)=y\Leftrightarrow \ln(x-2)=y\Leftrightarrow x-2=e^y\Leftrightarrow x=e^y+2$$

Επιπλέον για κάθε $y\in\mathbb{R}$ θα πρέπει $x\in D_h=(2,+\infty)$, δηλαδή:

$$e^y+2>2\Leftrightarrow e^y>0 \text{ που ισχύει για κάθε } y\in\mathbb{R}$$

Αφού $h(x)=y\Leftrightarrow h^{-1}(y)=x$, τότε $h^{-1}(y)=e^y+2,\ y\in\mathbb{R}$

Επομένως $h^{-1}(x)=e^x+2,\ x\in\mathbb{R}$

Β3. Είναι

$$\lim_{x\to2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to2}\left(\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right)=-\infty$$

Διότι:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(2\ln(x-1)\right)'}{(x-2)'}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2}{x-1}}{1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1}=2>0$
- $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\overset{u=x-2>0}{\underset{u\to 0^+}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\ln u=-\infty$

Θέμα Γ

Γ1.i. Η f(x) έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ πρέπει να είναι πεπερασμένο.

Έστω ότι $k\neq 0$ τότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^3+\mu x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(kx)=\begin{cases}+\infty, & k>0\\ -\infty, & k<0\end{cases}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$, άρα $k=0$.

Άρα έχουμε $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$.

Γ1.ii. Αφού η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική της f στο $O(0,0)$ τότε $f'(0)=1$.

Είναι:

$$f'(x)=\frac{\mu\left(x^2+1\right)-2\mu x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\mu-\mu x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Άρα έχουμε $f'(0)=\dfrac{\mu}{1}=1$ άρα $\mu=1$.

Γ2.i. Έχουμε $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, άρα $f'(x)=\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, άρα το πρόσημο είναι ίδιο με του αριθμητή. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f είναι γν. αύξουσα στο $\left(-\infty,-1\right]$ και στο $\left[1,+\infty\right)$ και γν. φθίνουσα στο $\left[-1,1\right]$.

Στο -1 έχει τοπικό ελάχιστο $f\left(-1\right)=-\frac{1}{2}$ και στο 1 έχει τοπικό μέγιστο $f\left(1\right)=\frac{1}{2}$.

Γ2.**ii.** Έστω $A_1=\left(-\infty,-1\right]$, $A_2=\left(-1,1\right)$, $A_3=\left[1,+\infty\right)$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο A_1 άρα

$$f\left(A_1\right)=\left[f\left(-1\right),\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right)$$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_2 άρα

$$f\left(A_2\right)=\left(\lim_{x\to-1^+}f\left(x\right),\lim_{x\to1^-}f\left(x\right)\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο A_3 άρα

$$f\left(A_3\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right),f\left(1\right)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

Αρα $f\left(A\right)=f\left(A_1\right)\cup f\left(A_2\right)\cup f\left(A_3\right)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Για $\alpha=0$ είναι $\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$, οπότε:

$$\frac{1}{2}\notin f\left(A_1\right),\ \frac{1}{2}\notin f\left(A_2\right)\text{ και }\frac{1}{2}\in f\left(A_3\right)$$

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_3 θα έχει μοναδική λύση.

Για $\alpha\neq0$ είναι $\alpha^2>0\Rightarrow\alpha^2+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$ άρα το $\alpha^2+\frac{1}{2}\notin f\left(A\right)$ άρα αδύνατη.

Γ3.i. Είναι:

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

Γ3.ii. Είναι

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

Άρα

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2\cdot 0+2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2\cdot 1+2} \Leftrightarrow \frac{1-\ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{\ln 2 - 1}{2}$$

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρώ $h(x)=g(x)+x,\ \ x\in\mathbb{R}$

- Η h συνεχής στο [-1,0] ως πράξεις συνεχών
- $h(-1)=g(-1)-1<0$

διότι:

$$0<g(-1)<1 \Leftrightarrow -1<g(-1)-1<0$$

$$h(0)=g(0)>0 \text{ διότι } 0<g(0)<1$$

Από Θ. Β υπάρχει $x_1 \in (-1,0)$ ώστε $h(x_1)=0 \Leftrightarrow g(x_1)+x_1=0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=g'(x)+1\neq 0$

Επίσης η h' είναι συνεχής οπότε διατηρεί πρόσημο, άρα η h γν. μονότονη και η ρίζα x_1 μοναδική.

Δ2.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f=\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\left(g(x)+x\right)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-kx}{x}\Leftrightarrow$$

$$0\cdot\left(g(0)+0\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-k}{1}\Leftrightarrow$$

$$0=2\cdot\sigma\upsilon\nu 0+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 0}-k\Leftrightarrow$$

$$0=2+1-k\Leftrightarrow k=3$$

Δ3.i. Στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x$, οπότε

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Με παραγοντοποίηση του αριθμητή

$$(P(u)=2u^3-3u^2+1\ \text{Horner})$$

$$f'(x)=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x>0\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu x+1>0$$

Άρα έχουμε $f'(x)\geq 0$ με το ίσον μόνο για $x=0$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Έχουμε:

$$\frac{\pi}{2}>x\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f(0)=0$$

Δ3.ii. Έχουμε:

$$3f(x)=\pi \Leftrightarrow f(x)=\frac{\pi}{3}$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και συνεχής, άρα:

$$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)=[0,+\infty)$$

Αφού:

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x-3x+\varepsilon\varphi x)=+\infty$, αφού
  - $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x-3x)=2-3\frac{\pi}{2}$ και
  - $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\varepsilon\varphi x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\eta\mu x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=+\infty$

    $\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\eta\mu x=1,\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sigma\upsilon\nu x=0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu x>0 \text{ στο } \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα } \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=+\infty\right)$

Παρατηρώ ότι $\frac{\pi}{3}\in f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ άρα υπάρχει

$x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $f(x_2)=\frac{\pi}{3}$ και είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Δ4.i. $f(x)=x^2h(x)$, $x\in(-\infty,0]$, όπου h η συνάρτηση στο Δ1.

Αποδείξαμε ότι η h είναι γν. μονότονη και αφού $h(-1)<h(0)$ θα είναι γν. αύξουσα.

Αν $x_1\le x\le 0 \Rightarrow h(x_1)\le h(x)\le h(0)\Rightarrow 0\le h(x)$

Επίσης $x^2\ge 0$ στο $[x_1,0]$.

Άρα $f(x)\ge 0$ στο $[x_1,0]$

Δ4.ii. Θα ισχύει:

$$\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2\left(g(x)+x\right)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0}\left(x^2 g(x)+x^3\right)dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx = -2\cdot\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}\cdot g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0}\frac{x^3}{3}\cdot g'(x)dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = 1+\ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{{x_1}^3}{3}\cdot g(x_1) - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{{x_1}^4}{4} = 1+\ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{{x_1}^4}{3} - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{{x_1}^4}{4} = 1+\ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = -\frac{{x_1}^4}{12} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{{x_1}^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$$