ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
03-06-2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 133 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α.** Σελίδα 51 σχολικού βιβλίου.

β. Σελίδα 185 σχολικού βιβλίου.

Α3. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η $f \circ g$ ορίζεται με πεδίο ορισμού

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [2,+\infty) \mid \sqrt{x-2}+1>1\} \\ &= \{x \in [2,+\infty) \mid \sqrt{x-2}>0\} = \{x \in [2,+\infty) \mid x>2\} \\ &= (2,+\infty) \end{aligned}$$

Και τύπο

$$\begin{aligned} (f\circ g)(x) &= f(g(x)) = 2\ln(g(x)-1) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right) \\ &= 2\ln\left(\sqrt{x-2}\right) = \ln\left(\sqrt{x-2}\right)^2 \\ &= \ln(x-2) \end{aligned}$$

Β2. Είναι $h(x)=\ln(x-2),\ \ x>2$, οπότε

$$h'(x)=\frac{1}{x-2}>0,\ \ x>2$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Για $x \in (2,+\infty)$ και $y \in h((2,+\infty))$ έχουμε:

$$h(x)=y \Leftrightarrow \ln(x-2)=y \Leftrightarrow x-2=e^y \Leftrightarrow x=e^y+2$$

Επιπλέον για κάθε $y \in$ θα πρέπει $x \in D_h=(2,+\infty)$, δηλαδή:

$$e^y+2>2 \Leftrightarrow e^y>2 \text{ που ισχύει για κάθε } y \in$$

Αφού $h(x)=y \Leftrightarrow h^{-1}(y)=x$, τότε $h^{-1}(y)=e^y+2,\ \ y \in$

Επομένως $h^{-1}(x)=e^x+2,\ \ x \in$

Β3. Είναι

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right)=-\infty$$

Διότι:

- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(2\ln(x-1)\right)'}{(x-2)'}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2}{x-1}}{1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1}=2>0$
- $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)\overset{u=x-2>0}{\underset{u\to 0^{+}}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\ln u=-\infty$