



ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σελίδα 65 σχολικού βιβλίου.
A2. Σελίδα 88 σχολικού βιβλίου.
A3. Σελίδα 28 σχολικού βιβλίου.
A4. α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

B2. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\text{άρα } x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ και } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και στο $[3, +\infty)$.

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$.

$$\text{Για } x = -1 \text{ έχει τοπικό μέγιστο } f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

Για $x=3$ έχει τοπικό ελάχιστο $f(3) = \frac{27}{3} - 9 - 9 + 1 = -8$

B3 Είναι $f(0)=1$ άρα $A(0,1)$.

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x+\beta$, όπου $\lambda=f'(0)=-3$ άρα τελικά $y=-3x+\beta$.

Επίσης διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ άρα:

$$1=0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$$

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y=-3x+1$$

B4. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = -4$$

ΘΕΜΑ Γ

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι επτά μαθητές είναι:

4,5,4,κ,0,3,7

Γ1. Είναι $\bar{x}=4$.

Άρα:

$$\frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow$$

$$23+\kappa=28 \Leftrightarrow$$

$$\kappa=5$$

Γ2. Για $\kappa=5$ οι παρατηρήσεις είναι:

4, 5, 4, 5, 0, 3, 7

Τις διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά:

0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n=7$, η διάμεσος είναι η μεσαία, δηλαδή η 4^η παρατήρηση. Άρα:

$$\delta=4$$

Γ3. Είναι $\bar{x}=4$.

Η διακύμανση είναι:

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{(4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (0-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2}{7} = \\
 &= \frac{0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 3^2}{7} = \\
 &= \frac{0 + 1 + 0 + 1 + 16 + 1 + 9}{7} = \\
 &= \frac{28}{7} = 4
 \end{aligned}$$

- Γ4.** Είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$.
Ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$\begin{aligned}
 CV &= \frac{s}{\bar{x}} \\
 CV &= \frac{2}{4} = 0,5 \quad \text{ή} \quad CV = 50\%
 \end{aligned}$$

Επειδή:

$$CV = 50\% > 10\%,$$

το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Έστω x η μία πλευρά του ορθογωνίου και y η άλλη πλευρά του.
Επειδή το εμβαδόν του οικοπέδου είναι 100m^2 , έχουμε:
 $xy = 100$

Άρα:

$$y = \frac{100}{x}, \text{ με } x > 0$$

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$$

$$\text{Άρα } \Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0.$$

- Δ2.** Είναι:

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 \Pi'(x) &= 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} \\
 &= \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} = \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}
 \end{aligned}$$

Είναι $x > 0$, οπότε έχουμε:

$$x^2 > 0 \text{ και } x+10 > 0.$$

Άρα το πρόσημο της $\Pi'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο του $x-10$.

$$\text{Έτσι } \Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Προκύπτει επομένως ο παρακάτω πίνακας:

x	0	10	$+\infty$
$\Pi'(x)$		- 0 +	
$\Pi(x)$		$\Pi(10) = 40$	

Άρα η Π είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,10]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[10,+\infty)$.

Επομένως η Π παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 10$.

Τότε:

$$y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10} = 10.$$

Άρα:

$$x = y = 10.$$

Επομένως το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο.

Δ3. Αν $x_1, x_2 \in (0,10)$ με $x_1 < x_2$.

Στο διάστημα $(0,10)$ η συνάρτηση Π είναι γνησίως φθίνουσα και αφού είναι $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$$

Επομένως:

$$\Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$$

Επίσης, επειδή $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$x_1 - x_2 < 0$$

Άρα:

$$A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

Δ4. Είναι:

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$$

Άρα:

$$\Pi'(x) = \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}}{\sqrt{10x} - 10} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2(10x - 100)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2(x-10)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{5x^2} \\&= \frac{(10+10)(\sqrt{100} + 10)}{5 \cdot 10^2} \\&= \frac{20 \cdot (10+10)}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$