



Μαθηματικά Προσανατολισμού

Γ Λυκείου

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σελ. 144 σχολικό
A2. Σελ. 157 σχολικό
A3. Σελ. 104 σχολικό
A4. α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και έχουμε:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

Επειδή $x > 0$, έχουμε:

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$,
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει στο $x=1$ ολικό ελάχιστο, το οποίο είναι $f(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$.

- B2.** Έχουμε $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$.

$$\text{Άρα } f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2}.$$

Για κάθε $x > 0$, ισχύει:

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2} > 0$$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Επειδή η f'' δεν μηδενίζεται και δεν αλλάζει πρόσημο, η C_f δεν έχει σημείο καμπής.

- B3.** Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, δεν υπάρχουν υποψήφια εσωτερικά σημεία του D_f για κατακόρυφη ασύμπτωτη. Το μόνο υποψήφιο σημείο είναι το 0, που είναι άκρο του πεδίου ορισμού.

Εξετάζουμε πρώτα το:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2\ln x) = +\infty,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Επομένως η ευθεία $x=0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Για ασύμπτωτη στο $+\infty$ εξετάζουμε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2\ln x}{x} \right) = +\infty,$$

διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Άρα στο $+\infty$ δεν έχει ασύμπτωτη.

- B4.** Θα αποδείξουμε ότι:

$$e^{\frac{x^2-1}{2}} \geq x, \quad x > 0.$$

Πράγματι. Για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{\frac{x^2-1}{2}} \geq x &\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2} \geq \ln x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 2\ln x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2\ln x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow f(x) \geq 1 \quad \text{Αληθής} \end{aligned}$$

Από το B1 γνωρίζουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, με τιμή $f(1)=1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \neq 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(x-1)f(x) &= x^3 - x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow \\(x-1)f(x) &= x^2(x-1) + 2(x-1) \Leftrightarrow \\(x-1)f(x) &= (x-1)(x^2 + 2) \Leftrightarrow \\f(x) &= \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x-1} \Leftrightarrow \\f(x) &= x^2 + 2\end{aligned}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , είναι συνεχής και στο $x=1$.

$$\text{Άρα } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

Όμως, για $x \neq 1$, ισχύει $f(x) = x^2 + 2$, οπότε:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$$

ή πιο απλά:

$$f(x) = x^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ2.α. Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και έχουμε:

$$g'(x) = (e^x + x - 1)' = e^x + 1 > 0$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Γ2.β. Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$e^{f(x)-2} + x^2 - 1 = 0$$

Έχουμε:

$$f(x) = x^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 = x^2$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}e^{f(x)-2} + x^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow e^{x^2} + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x^2) = g(0) \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα και 1-1.

Γ3.α. Για $x \rightarrow +\infty$ το $|x| = x$, οπότε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 1\right)} \right] = 0 \cdot \frac{2}{1 + 1} = 0
\end{aligned}$$

Γ3.β. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right] \stackrel{u = \frac{1}{f(x)} > 0}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu u}{u} = 1$$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, τότε κοντά στο $+\infty$ είναι $f(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Γ4. Από το Γ1 έχουμε $f(x) = x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, με:

$$f'(x) = 2x$$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επίσης, από το Γ2α, η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Τότε:

Περίπτωση 1, για $x = 0$:

$$\begin{aligned}
g(f(2^0)) + g(f(3^0)) &= g(f(4^0)) + g(f(5^0)) \Leftrightarrow \\
g(f(1)) + g(f(1)) &= g(f(1)) + g(f(1))
\end{aligned}$$

Η εξίσωση επαληθεύεται:

Περίπτωση 2, για $x < 0$:

$$\left. \begin{aligned}
2^x > 4^x &\Rightarrow f(2^x) > f(4^x) \Rightarrow g(f(2^x)) > g(f(4^x)) \\
3^x > 5^x &\Rightarrow f(3^x) > f(5^x) \Rightarrow g(f(3^x)) > g(f(5^x))
\end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \\
g(f(2^x)) + g(f(3^x)) &> g(f(4^x)) + g(f(5^x))$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση για $x < 0$.

Περίπτωση 3, για $x > 0$:

$$\left. \begin{aligned} 2^x < 4^x &\Rightarrow f(2^x) < f(4^x) \Rightarrow g(f(2^x)) < g(f(4^x)) \\ 3^x < 5^x &\Rightarrow f(3^x) < f(5^x) \Rightarrow g(f(3^x)) < g(f(5^x)) \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (+) \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$g(f(2^x)) + g(f(3^x)) < g(f(4^x)) + g(f(5^x))$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύση για $x > 0$.

Συνεπώς η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι $x = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+2h) - 2g(x+h) + g(x)}{h^2} = g''(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής, οπότε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [g(x+2h) - 2g(x+h) + g(x)] = g(x) - 2g(x) + g(x) = 0$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+2h) - 2g(x+h) + g(x)}{h^2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ h \rightarrow 0} \frac{(g(x+2h) - 2g(x+h) + g(x))'}{(h^2)'} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2g'(x+2h) - 2g'(x+h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+2h) - g'(x) + g'(x) - g'(x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+2h) - g'(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} \\ &= 2g''(x) - g''(x) = g''(x) \end{aligned}$$

Αφού:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} = g''(x) \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+2h) - g'(x)}{h} &= 2 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+2h) - g'(x)}{2h} \\ &\stackrel{u=2h}{=} 2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = 2 \cdot g''(x) \end{aligned}$$

Δ1.β. Προκύπτει $g''(x) = g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν $p(x) = g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ η παραπάνω γράφεται $p'(x) = p(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Από εφαρμογή του σχολικού προκύπτει ότι:

$$p(x) = \alpha \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

Επομένως

$$g'(x) = \alpha e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = \alpha e^x \Leftrightarrow g(x) = \alpha \cdot e^x + c$$

Επειδή η γραφική παράσταση της g έχει στο $-\infty$ ασύμπτωτη τον άξονα x' , ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha e^x + c) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα $g(x) = \alpha e^x, \quad x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ2. Από τη σχέση:

$$g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

και από το Δ1β, έχουμε:

$$\alpha e^x = f(x) + \frac{x^2}{2} + x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \alpha e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

- $f'(x) = \alpha e^x - x - 1$ και
- $f''(x) = \alpha e^x - 1$.

Αν $\alpha \in (0, 1)$, τότε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x = -\ln \alpha$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \alpha e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x < -\ln \alpha$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x > \ln \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x > -\ln \alpha$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty, -\ln \alpha]$ και προς τα άνω στο $[-\ln \alpha, +\infty)$, ενώ $f''(-\ln \alpha) = 0$, επομένως η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, με τετμημένη

$$x_0 = -\ln \alpha$$

Η τεταγμένη του είναι:

$$f(x_0) = \alpha e^{x_0} - \frac{x_0^2}{2} - x_0 - 1$$

Επειδή:

$$x_0 = -\ln \alpha \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \cdot e^{x_0} = 1$$

Έτσι:

$$f(x_0) = 1 - \frac{x_0^2}{2} - x_0 - 1 = -\frac{x_0^2}{2} - x_0.$$

Άρα το σημείο καμπής είναι $K\left(x_0, -\frac{x_0^2}{2} - x_0\right)$. Επομένως βρίσκεται πάνω στην παραβολή:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x$$

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα, λόγω της κυρτότητας, έχουμε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Επειδή $\alpha \in (0, 1)$, έχουμε $x_0 = -\ln \alpha > 0$.

Επίσης $f'(x_0) = \alpha e^{x_0} - x_0 - 1$.

Επειδή $\alpha e^{x_0} = 1$, έχουμε:

$$f'(x_0) = 1 - x_0 - 1 = -x_0 < 0.$$

Επίσης:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha e^x - x - 1) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(\alpha - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$
- αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0$

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, x_0]$ άρα:

$$0 \in f'((-\infty, x_0]) = [f'(x_0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = [f'(x_0), +\infty)$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[x_0, +\infty)$ άρα:

$$0 \in f'([x_0, +\infty)) = [f'(x_0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)] = [f'(x_0), +\infty)$$

Άρα η f' έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x_1 \in (-\infty, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, +\infty)$.

Ακόμη:

- $x < x_1 \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0$
- $x_1 < x < x_0 \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0$
- $x_0 < x < x_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) = 0$
- $x > x_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) = 0$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$	x_1	x_0	x_2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$			$f(x_1)$		$f(x_2)$		

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει στο x_1 τοπικό μέγιστο και στο x_2 τοπικό ελάχιστο.

Δ4. Για $a = \frac{1}{e}$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{e} e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 = e^{x-1} - \frac{x^2}{2} - x - 1$$

Θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση:

$$f(x^4 + 2) + f(x^2 + 3) > f(x^4 + 1) + f(x^2 + 4)$$

Η ανίσωση γράφεται:

$$f(x^4 + 2) - f(x^4 + 1) > f(x^2 + 4) - f(x^2 + 3).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \geq 1$$

Τότε η ανίσωση γίνεται:

$$h(x^4 + 1) > h(x^2 + 3).$$

Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της h στο $[1, +\infty)$.

Έχουμε:

$$h'(x) = f'(x+1) - f'(x)$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$, και $x_0 = -\ln a = -\ln \frac{1}{e} = 1$,

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Έτσι για κάθε $x \geq 1$ είναι:

$$x+1 > x \Leftrightarrow f'(x+1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x+1) - f'(x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Επειδή $x^4 + 1 \geq 1$ και $x^2 + 3 \geq 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} h(x^4 + 1) > h(x^2 + 3) &\Leftrightarrow x^4 + 1 > x^2 + 3 \Leftrightarrow x^4 + 1 > x^2 + 3 \\ &\Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x^2 + 1) > 0 \\ &\stackrel{x^2+1>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \text{ ή } x > \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } u^2 - u - 2 = (u-2)(u+1)$$