

ΤΑΞΗ: Γ Λυκείου

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 , ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, τότε η C_f έχει πάντοτε οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$.

γ. Αν $f'(x) > 0$, για κάθε x σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ .

δ. Η ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 .

ε. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα ισχύει υποχρεωτικά και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Μονάδες 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2\ln x, \quad x > 0$$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, αν αυτά υπάρχουν.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{x^2-1}{2}} \geq x$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται συναρτήσεις f και g τέτοιες, ώστε:

- $(x-1)f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $g(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^2 + 2$$

Μονάδες 4

Γ2. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 2

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{f(x)-2} + x^2 - 1 = 0$$

Μονάδες 3

Γ3. Να βρεθούν τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - x)$

Μονάδες 5

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right]$

Μονάδες 3

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση:

$$g(f(2^x)) + g(f(3^x)) = g(f(4^x)) + g(f(5^x))$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και για τις οποίες ισχύει:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+2h) - 2g(x+h) + g(x)}{h^2} = g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$,
- η γραφική παράσταση της g έχει στο $-\infty$ ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και
- $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2} + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+2h) - 2g(x+h) + g(x)}{h^2} = g''(x), x \in \mathbb{R}.$

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \alpha \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}.$

Μονάδες 4

Δ2. Αν $\alpha \in (0,1)$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το οποίο βρίσκεται πάνω στην παραβολή $y = -\frac{1}{2}x^2 - x.$

Μονάδες 4

Δ3. Αν $\alpha \in (0,1)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2,$ ώστε η f να παρουσιάζει στο x_1 τοπικό μέγιστο και στο x_2 τοπικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha = \frac{1}{e}$ να λύσετε στο \mathbb{R} την ανίσωση:

$$f(x^4 + 2) + f(x^2 + 3) > f(x^4 + 1) + f(x^2 + 4)$$

Μονάδες 7